半線形放物型偏微分方程式におけるKneserの定理と解写像の写像度(定性的微分方程式論とその応用)

数理解析研究所講究録
900 巻 1995 年 119-129

半線形放物型偏微分方程式における Kneser の定理と解写像の写像度

上之郷高志　　東北学院大教養
菊池　紀夫　　慶応大理工

1. 解集合のコンパクト性 D を R^n の有界な開領域とし，その境界 ∂D は十分滑らかとする．次の初期値境界値問題を考える．

$$
(\mathrm{E}) \qquad \begin{cases} \partial u/\partial t = \Delta u + f(u) & t>0, \quad x \in D, \\ u(0,x) = u_0(x) & u_0 \in C(\bar{D}, \boldsymbol{R}), \\ \partial u/\partial \nu = 0 & t>0, \quad x \in \partial D. \end{cases}
$$

ここで ν は ∂D の外向き単位法線ベクトルを表し，$f \in C(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R})$ は次の条件を満たしているものとする．

$$
(\mathrm{A}_1) \qquad \exists a>0,\ \exists b>0,\ \forall u \in \boldsymbol{R}, \quad |f(u)| \leqq a + b|u|.
$$

注意1 以下の議論では，$f(u)$ は $f(t, x, u)$ に置き換えても成り立つが，記述を簡単にするために，f は u だけの関数として扱うことにする．

また領域 D に対し，次の仮定をおく．

$$
(\mathrm{A}_2) \qquad \begin{cases} \exists \gamma>0,\ \forall (x,y) \in \bar{D} \times \bar{D},\ \exists \{p_0, p_1, p_2, \cdots, p_k\} \subset \bar{D}, \\ x = p_0, \quad y = p_k, \quad \overline{p_{i-1} p_i} \subset \bar{D}, \quad \sum_{i=1}^{k} |p_i - p_{i-1}| \leqq \gamma |x-y|. \end{cases}
$$

すなわち，x と y を結ぶ折れ線 P が $\bar{D}$ の中にとれて，P の長さが $\gamma|x-y|$ 以下にできるものとする．

上の仮定 (A_2) は，「D は滑らかな境界をもつ有界開領域である」ことから証明さ

れるものと思われる.

定義　$T>0$ とする．$u\in C([0,T]\times\bar{D},R)$ が

$$u(t,x)=\int_D U(t,x,y)u_0(y)dy+\int_0^t ds\int_D U(t-s,x,y)f(u(s,y))dy$$

を満たすとき，u を（E）の mild solution と呼ぶ．ここで，U は $\partial u/\partial t=\Delta u$, $\partial u/\partial\nu=0$ の基本解である.

$T>0$ を任意にとり固定し，$[0,T]\times\bar{D}$ での mild solutions の評価をしよう．次の補題1は，よく知られた結果（例えば[1]参照）である.

補題1　正の数 C が存在して，任意の $t\in(0,T]$ と，任意の $x,y\in\bar{D}$ に対して，次が成り立つ.

(1)　$0\leqq U(t,x,y)\leqq Ct^{-n/2}\exp(-|x-y|^2/Ct)$,

(2)　$\int_D U(t,x,y)dy=1$,

(3)　$\left|\dfrac{\partial}{\partial x_j}U(t,x,y)\right|\leqq Ct^{-(n+1)/2}\exp(-|x-y|^2/Ct)$,　$1\leqq j\leqq n$.

補題2　$0<t\leqq T$ かつ $x,z\in\bar{D}$ のとき,

$$\int_D|U(t,x,y)-U(t,z,y)|dy\leqq C_1t^{-1/2}|x-z|$$

が成り立つ．ここで，$C_1=\gamma\sqrt{n}\,\pi^{n/2}C^{1+n/2}$ である.

証明　（A_2）より，線分 xz が $\bar{D}$ に含まれているとき,

$$\int_D|U(t,x,y)-U(t,z,y)|dy\leqq\sqrt{n}\,\pi^{n/2}C^{1+n/2}t^{-1/2}|x-z|$$

を示せばよい．まず,

$$|U(t,x,y)-U(t,z,y)|=\left|\int_0^1\frac{d}{d\rho}U(t,\rho x+(1-\rho)z,y)d\rho\right|$$

$$\leqq \sqrt{n}\int_0^1 C\,t^{-(n+1)/2}\,|x-z|\exp\left\{-\frac{|\rho x+(1-\rho)z-y|}{C\,t}\right\}d\rho \qquad (\text{by}(3)).$$

したがって,

$$\int_D |U(t,x,y)-U(t,z,y)|dy$$

$$\leqq \sqrt{n}\,C\,|x-z|\int_0^1\int_{R^n} t^{-(n+1)/2}\exp(-|y|^2/C\,t)dy\,d\rho$$

$$=\sqrt{n}\,\pi^{n/2}\,C^{1+n/2}\,t^{-1/2}\,|x-z|. \qquad \text{q.e.d.}$$

補題3　$0<t\leqq T$ かつ $x,z\in\bar{D}$ のとき,

$$\int_D U(t,x,z)|x-z|dz\leqq C_2\sqrt{t}$$

が成り立つ. ここで $C_2=C^{(n+3)/2}\int_{R^n}|\xi|\exp(-|\xi|^2)d\xi$ である.

証明　(1)より, 変数変換 $z=x+\sqrt{C\,t}\,\xi$ をほどこして得られる.　　q.e.d.

$C(\bar{D},\boldsymbol{R})$ と $C([0,T]\times\bar{D},\boldsymbol{R})$ は, sup norm $\|\cdot\|$ の入った Banach 空間とする. $u_0\in C(\bar{D},\boldsymbol{R})$ に対し, $S\,u_0$ を次で定める.

$$(S\,u_0)(t,x):=\begin{cases}\displaystyle\int_D U(t,x,y)\,u_0(y)dy, & (t,x)\in(0,T]\times\bar{D},\\ u_0(x), & t=0,\quad x\in\bar{D}.\end{cases}$$

このとき, $S\,u_0\in C([0,T]\times\bar{D},\boldsymbol{R})$ である. また, $u\in C([0,T]\times\bar{D},\boldsymbol{R})$ と $f\in C(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R})$ に対し, $H[f,u]$ を

$$H[f,u](t,x):=\int_0^t ds\int_D U(t-s,x,y)\,f(u(s,y))dy,$$

$$(t,x)\in[0,T]\times\bar{D}$$

で定める. $H[f,u]\in C([0,T]\times\bar{D},\boldsymbol{R})$ である.

補題4　$u_0 \in C(\bar{D}, R)$, $\|u_0\| \leqq M_0$ とする．$0 < t < t' \leqq T$ かつ $x, x' \in \bar{D}$ のとき，次が成り立つ．

(4)　$$|(Su_0)(t, x) - (Su_0)(t', x')| \leqq C_3 t^{-1/2}(\sqrt{t'-t} + |x - x'|).$$

ここで，$C_3 = M_0 C_1 \max\{C_2, 1\}$ である．

証明　U の半群の性質より次が成り立つ．

$$U(t', x, y) = \int_D U(t'-t, x, z) U(t, z, y) dz.$$

これと (2) を用いて，

$$\begin{aligned}
&(Su_0)(t', x) - (Su_0)(t, x) \\
&= \int_D \int_D U(t'-t, x, z) U(t, z, y) u_0(y) dz dy \\
&\qquad - \int_D U(t'-t, x, z) dz \int_D U(t, x, y) u_0(y) dy \\
&= \int_D U(t'-t, x, z) dz \int_D \{U(t, z, y) - U(t, x, y)\} u_0(y) dy
\end{aligned}$$

を得る．従って，補題2，3より，

$$|(Su_0)(t', x) - (Su_0)(t, x)| \leqq M_0 C_1 C_2 t^{-1/2} \sqrt{t'-t}.$$

また補題2より次の評価も得られる．

$$|(Su_0)(t', x) - (Su_0)(t', x')| \leqq M_0 C_1 t^{-1/2} |x - x'|.$$

上の2つの不等式より (4) が従う．　　　　　　　　　　　q.e.d.

補題5　$u \in C([0, T] \times \bar{D}, R)$, $\|u\| \leqq M_1$ とする．$0 \leqq t < t' \leqq T$ かつ $x, x' \in \bar{D}$ のとき，次が成り立つ．

$$|H[f,u](t,x)-H[f,u](t',x')| \tag{5}$$
$$\leqq C_4\sqrt{t}(\sqrt{t'-t}+|x-x'|)+M(t'-t).$$

ただし，$M=a+bM_1$，$C_4=2MC_1\max\{C_2,1\}$ である．

証明 まず $\forall(s,y)\in[0,T]\times\bar{D}$，$|f(u(s,y))|\leqq a+bM_1=M$ であることに注意しよう．

$$|H[f,u](t',x')-H[f,u](t,x')|$$
$$\leqq\left|\int_0^t ds\int_D\{U(t'-s,x',y)-U(t-s,x',y)\}f(u(s,y))dy\right|$$
$$+\int_t^{t'}ds\int_D U(t'-s,x',y)|f(u(s,y))|dy$$

ここで，$U(t'-s,x',y)=\int_D U(t'-t,x',z)U(t-s,z,y)dz$ と(2)より，

$$\leqq M\int_0^t ds\int_D U(t'-t,x',z)dz\int_D|U(t-s,z,y)-U(t-s,x',y)|dy$$
$$+M(t'-t).$$

補題2，3を用いると，上式の第1項 $\leqq 2MC_1C_2\sqrt{t}\sqrt{t'-t}$．

また補題2より，次の評価が得られる．

$$|H[f,u](t,x')-H[f,u](t,x)|$$
$$\leqq M\int_0^t ds\int_D|U(t-s,x',y)-U(t-s,x,y)|dy$$
$$\leqq 2MC_1\sqrt{t}|x-x'|.$$

q.e.d.

補題6 $u_0\in C(\bar{D},\boldsymbol{R})$，$\|u_0\|\leqq M_0$ とする．もし $u\in C([0,T]\times\bar{D},\boldsymbol{R})$ が(E)の mild solution ならば，$|u(t,x)|\leqq(M_0+aT)e^{bT}$ が成り立つ．

証明 Gronwall の不等式を用いる．

定理1 任意の $u_0 \in C(\bar{D}, \boldsymbol{R})$ に対して，（E）は $[0, T] \times \bar{D}$ で定義された mild solution をもつ．

証明 Schauder の不動点定理を用いて，局所解の存在が示せる．また補題4，5とツォルンの補題を用いると，$t = T$ まで解が延長できることが分かる． q.e.d.

定理2 $f_m \in C(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R})$ が次の条件（i），（ii）を満たしているとする．

（i） $|f_m(u)| \leqq a + b|u|$， $u \in \boldsymbol{R}$，

（ii） $f_m \to f$ as $m \to \infty$ （$\boldsymbol{R}$ で広義一様収束）．

また $u_0, u_m^0 \in C(\bar{D}, \boldsymbol{R})$ は $\bar{D}$ で一様に $u_m^0 \to u_0$ (as $m \to \infty$) であるとする．もし $u_m \in C([0, T] \times \bar{D}, \boldsymbol{R})$ が

$$
(\mathrm{E}_m) \quad \begin{cases} \partial u / \partial t = \Delta u + f_m(u) & t > 0, \quad x \in D, \\ u(0, x) = u_m^0(x) & x \in \bar{D}, \\ \partial u / \partial \nu = 0 & t > 0, \quad x \in \partial D \end{cases}
$$

の mild solution とすると，$\{u_m\}$ の部分列で，（E）のひとつの mild solution u に，$[0, T] \times \bar{D}$ で一様収束するものがある．

証明 u_m は $u_m = S u_m^0 + H[f_m, u_m]$ を満たしている．そして

$$
|(S u_m^0)(t, x) - (S u_0)(t, x)| \leqq \int_D U(t, x, y)\,|u_m^0(y) - u_0(y)|\,dy
$$

より $\|S u_m^0 - S u_0\| \leqq \|u_m^0 - u_0\| \to 0$，すなわち，$S u_m^0 \to S u_0\ (m \to \infty)$ である．

仮定より，正の数 M_0 が存在して，$\|u_m^0\| \leqq M_0$ が成り立っているから，補題6より，$|u_m(t, x)| \leqq M_1$ を満たす正の数 M_1 が存在する．よって，$|f_m(u_m(t, x))| \leqq a + b M_1$ が成り立ち，補題5から，$\{H[f_m, u_m]\}$ は同等連続となる．Ascoli-Arzelà の定理より，$\{u_m\}$ の適当な部分列で，$C([0, T] \times \bar{D}, \boldsymbol{R})$ の元 u に一様収束するものがある．この u が（E）の mild solution であることは明らか． q.e.d.

補題7 $f(u)$ が次の Lipschitz 条件を満たしているとする．

$$\forall \beta > 0,\ \exists L(\beta) > 0,\ |f(u) - f(v)| \leqq L(\beta)|u - v|, \qquad u, v \in [-\beta, \beta].$$

このとき，（E）の mild solution は一意的である．

証明　Gronwall の不等式より明らか．

補題8　条件（A_1）を満たす $f \in C(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R})$ に対して，$C(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R})$ 内の列 $\{f_m\}$ で，定理2の（i），（ii）および次の（iii）を満たすものが存在する．

（iii）　f_m は補題7の Lipschitz 条件を満たす．

証明　Mollifier を用いる．

2．Kneser の性質　ここでは次の定理を証明する．

定理3　$f \in C(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R})$ は条件（A_1）を満たしているとする．このとき，任意の $u_0 \in C(\bar{D}, \boldsymbol{R})$ に対して，集合

$$\mathcal{F} = \{u \in C([0, T] \times \bar{D}, \boldsymbol{R});\ u\ \text{は（E）の mild solution}\}$$

は，$C([0, T] \times \bar{D}, \boldsymbol{R})$ のコンパクトな連結集合である．

証明　Hartman の本［2, pp. 15-17］と同じ方針で示す．

$$u \in \mathcal{F} \iff u = S u_0 + H[f, u]$$

と補題5および定理2より，$\mathcal{F}$ がコンパクトであることが示される．

$\mathcal{F}$ の連結性を示そう．$\mathcal{F}$ が連結でないとすると，$C([0, T] \times \bar{D}, \boldsymbol{R})$ の開集合 O と2つの空でないコンパクト集合 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ が存在して次が成り立つ．

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2, \quad \mathcal{F}_1 \subset O, \quad \mathcal{F}_2 \cap \bar{O} = \emptyset.$$

$u_1 \in \mathcal{F}_1$，$u_2 \in \mathcal{F}_2$ をとる．番号 m を固定し，関数 g_1, g_2 を次で定める．

$$g_i(t,x,u):=f(u_i(t,x))-f_m(u_i(t,x))+f_m(u), \qquad i=1,2.$$

ただし，f_m は補題8の（i）〜（iii）を満たすものとする．このとき，$u_i(t,x)$ は方程式 $\partial u/\partial t=\Delta u+g_i(t,x,u)$ の mild solution になっている（$i=1,2$）.

次に，任意の $\theta\in[0,1]$ に対して，h_θ を $h_\theta:=(1-\theta)g_1+\theta g_2$ で定め，初期値境界値問題

$$(\mathrm{E}_\theta)\qquad \begin{cases} \partial u/\partial t=\Delta u+h_\theta(t,x,u) & t>0,\quad x\in D, \\ u(0,x)=u_0(x) & \qquad\quad x\in\bar{D}, \\ \partial u/\partial\nu=0 & t>0,\quad x\in\partial D \end{cases}$$

を考える．前節の注意1（p.1）で述べたように，前節の諸結果は（E_θ）についても適用されることに注意しよう．$h_\theta(t,x,u)$ は u について Lipschitz 連続であるから，補題7より，（E_θ）は唯1つの mild solution $\tilde{u}_\theta(t,x)$ を持つ．定理2より，$\tilde{u}_\theta$ は θ について連続であり．$\tilde{u}_0=u_1$，$\tilde{u}_1=u_2$ だから $\exists\,\theta\in[0,1]$，$\tilde{u}_\theta\in\partial O$．この θ と $\tilde{u}_\theta$ を，それぞれ θ_m，u_m で表すと，u_m は $\partial u/\partial t=\Delta u+h_{\theta_m}$ の mild solution で，$h_{\theta_m}\to f$（広義一様収束）である．したがって，定理2より，（E）の mild solution u が存在して，$\{u_m\}$ は u に一様収束しているとしてよい．$u_m\in\partial O$ であったから，$u\in\partial O$．従って $\mathcal{F}\cap\partial O\ni u$ である．これは O のとり方に矛盾． **q.e.d.**

系1　$\{u(T);\ u\in\mathcal{F}\}$ は $C(\bar{D},\boldsymbol{R})$ のコンパクトな連結集合である．

注意2　$D=\boldsymbol{R}^n$ の場合には，$\mathcal{F}$ は $C([0,T]\times\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{R})$ の，広義一様収束の位相で，コンパクトな連結集合になる[3].

3．解写像の写像度

$X:=C(\bar{D},\boldsymbol{R})$ とし，

$$K(X):=\{A;\ A\ \text{は}\ X\ \text{の空でないコンパクト集合}\}$$

とする．$u_0\in X$ に対し，

$$\Phi(u_0):=\{u(T);\ u\ \text{は}\ (\mathrm{E})\ \text{の mild solution}\}$$

で写像 $\Phi: X\to K(X)$ を定義する．また補題8の f_m に対し，(E_m) で $u_m^0=u_0$ としたものは，唯1つの mild solution $u_m(t, x)$ をもち，

$$\varphi_m(u_0):=u_m(T), \qquad u_0\in X,$$

で φ_m を定めると，写像 $\varphi_m: X\to X$ が得られる．$\{\varphi_m\}$ を Φ の **近似列** と呼ぶ．

補題9　$\varphi_m: X\to X$ は連続かつ完全連続である．

証明　定理2より φ_m の連続性がわかる．また，$u_m=Su_0+H[f_m, u_m]$ において，u_0 が有界な範囲をうごくとき，補題6より，u_m も有界な範囲を動くから，補題4，5により $\{u_m(T)\}$ は同等連続である．　q.e.d.

一般に，集合 $A\subset X$ と写像 $\Psi: X\to K(X)$ が与えられたとき，集合 $\Psi(A)$ を $\Psi(A):=\bigcup\{\Psi(u);\ u\in A\}$ で定義する．さらに，$\varphi: X\to X$ に対して，写像 $\varphi+\Psi: X\to K(X)$ を

$$(\varphi+\Psi)(u):=\varphi(u)+\Psi(u)=\{\varphi(u)+x;\ x\in\Psi(u)\}, \qquad u\in X,$$

と定める．

Ω を X の有界な開集合とし，$p\in X$ を $p\notin(I-\Phi)(\partial\Omega)$ を満たすようにとる．ただし，$I: X\to X$ は恒等写像である．このとき，写像度 $\deg(I-\Phi, \Omega, p)$ が，近似列 $\{\varphi_m\}$ を用いて

$$\deg(I-\Phi, \Omega, p)=\lim_{m\to\infty}\deg(I-\varphi_m, \Omega, p) \tag{6}$$

で定義できることを示そう．$\{\varphi_m\}$ を与える $\{f_m\}$ をひとつ取り，番号 k，l と $\theta\in[0,1]$ に対し，

$$(\mathrm{E}_{k,l,\theta})\quad \begin{cases} \partial u/\partial t=\Delta u+(1-\theta)f_k(u)+\theta f_l(u) & t>0,\quad x\in D,\\ u(0, x)=u_0(x) & x\in\bar{D},\\ \partial u/\partial\nu=0 & t>0,\quad x\in\partial D \end{cases}$$

の唯1つの mild solution を $u_{k,l,\theta}$ で表し，さらに，

$$\varphi_{k,l,\theta}(u_0):=u_{k,l,\theta}(T), \qquad u_0\in X,$$

と定めると，補題９より $\varphi_{k,l,\theta}:X\to X$ は連続で完全連続である．

補題10. 十分大きな番号 n_0 をとると，

$$k,\ l\geqq n_0,\ \ \theta\in[0,1] \Longrightarrow p\notin(I-\varphi_{k,l,\theta})(\partial\Omega).$$

証明 もしそうでないとすると，

$$\forall m\in\boldsymbol{N},\ \exists\, k_m\geqq m,\ \exists\, l_m\geqq m,\ \exists\,\theta_m\in[0,\ 1],\ \exists\, u_m^0\in\partial\Omega,$$

(7) $$u_m^0 - \varphi_{k_m,l_m,\theta_m}(u_m^0)=p.$$

$(\mathrm{E}_{k,l,\theta})$ において，k，l，θ，$u_0(x)$ を，それぞれ，k_m，l_m，θ_m，$u_m^0(x)$ で置き換えたものの mild solution を u_{k_m,l_m,θ_m} で表す．Ω は有界だから，$\{u_m^0\}$ も有界，したがって $\{u_{k_m,l_m,\theta_m}\}$ も有界である．よって，補題４，５より

$$\{\varphi_{k_m,l_m,\theta_m}(u_m^0)\}=\{u_{k_m,l_m,\theta_m}(T)\}$$

は同等連続である．Ascoli-Arzelà の定理より，$\exists\,\xi\in X$，$\varphi_{k_m,l_m,\theta_m}(u_m^0)\to\xi$ としてよい．このとき，(7) より $u_m^0\to\xi+p=:u_0$ である．$u_m^0\to u_0$ と

$$(1-\theta_m)f_{k_m}(u)+\theta_m f_{l_m}(u)\to f(u) \qquad (\boldsymbol{R}\ \text{で広義一様収束})$$

より，定理２から，$\{u_{k_m,l_m,\theta_m}\}$ の部分列（これを再び $\{u_{k_m,l_m,\theta_m}\}$ とかく）と (E) の mild solution u が存在して，$u_{k_m,l_m,\theta_m}\to u$ である．したがって，

$$\varphi_{k_m,l_m,\theta_m}(u_m^0)=u_{k_m,l_m,\theta_m}(T)\to u(T), \qquad u(T)\in\Phi(u_0).$$

これより $u(T)=\xi$ が得られ，$\xi=u_0-p$ とあわせて，

$$\Phi(u_0)\ni u(T)=\xi=u_0-p$$

となる．これは $(I-\Phi)(u_0)\ni p$ を意味している．$\partial\Omega$ は closed だから $u_0\in$

$\partial\Omega$となり，p のとり方に矛盾.　　q.e.d.

定理2より，$\varphi_{k,l,\theta}(u_0)$ は $(\theta, u_0)\in[0,1]\times X$ について連続で，$\varphi_{k,l,0}=\varphi_k$，$\varphi_{k,l,1}=\varphi_l$ である．よって，補題10より，k，l が十分大なら

$$\deg(I-\varphi_k, \Omega, p)=\deg(I-\varphi_l, \Omega, p)$$

が成り立ち，(6) の右辺は意味をもつ．

Φ の近似列として，他の $\{\psi_m\}$ をとったとき，

$$\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2, \cdots\cdots, \varphi_m, \psi_m, \cdots\cdots$$

なる列も Φ の近似列になっている．よって (6) の値は近似列の取り方によらない．

定理4　$\deg(I-\Phi, \Omega, p)\neq 0$ ならば，$(I-\Phi)(u_0)\ni p$ を満たす $u_0\in\Omega$ が存在する．

証明　近似列 $\{\varphi_m\}$ をひとつ取る．十分大きな m について，$\deg(I-\varphi_m, \Omega, p)\neq 0$ だから，$\exists u_m^0\in\Omega$，$u_m^0-\varphi_m(u_m^0)=p$ である．補題10の証明と同様に $\{\varphi_m(u_m^0)\}$ は同等連続であることが示せる．よって，適当な $\xi\in X$ をとれば，$\varphi_m(u_m^0)\to\xi$ としてよい．このとき，$u_m^0\to\xi+p=:u_0$ である．一方，定理2より，$\xi\in\Phi(u_0)$ が得られ，これと $\xi=u_0-p$ から，$\Phi(u_0)\ni u_0-p$，すなわち，$(I-\Phi)(u_0)\ni p$ を得る．ここで，$u_0\in\bar{\Omega}$ であるが，p のとり方より，$u_0\in\Omega$ である．　q.e.d.

REFERENCES

[1] 伊藤清三，偏微分方程式（培風館，新数学シリーズ26），1966.

[2] Hartman, P., Ordinary Differential Equations, John Wiley and Sons, Inc. 1964.

[3] Kikuchi, N., Kneser's property for a parabolic partial differential equation, Nonlinear Analysis 20, 205-213(1993).